Lemme 1 : Soit $n \geq 3$. Le produit de 2 transpositions est un produit de 3 cycles.

preuve : Soient τ_1 et τ_2 deux transpositions de $[\![1;n]\!]$.
On raisonne par disjonction de cas sur le support des deux :

- si $\tau_1 = \tau_2$ alors $\tau_1\tau_2 = id = \gamma^3$ pour γ un quelconque 3 cycle.
- si $\tau_1 \neq \tau_2$ deux sous cas :

a) si $\mathrm{sup}(\tau_1) \cap \mathrm{sup}(\tau_2)$ est un singleton $\{z\}$ alors $\tau_1 = (x\,y)$ et $\tau_2 = (x\,z)$ avec x, y, z 2 à 2 distincts de $[\![1,n]\!]$.
on a alors $\tau_1\tau_2 = (x\,y)(x\,z) = (y\,x\,z)$ 3 cycle

b) si $\mathrm{sup}(\tau_1) \cap \mathrm{sup}(\tau_2) = \emptyset$ alors $\tau_1 = (x\,y)$ et $\tau_2 = (z\,t)$ avec x, y, z et t 2 à 2 $\neq$ dans $[\![1;n]\!]$.
on a $\tau_1\tau_2 = (x\,y)(z\,t) = (x\,y)\underbrace{(y\,z)(y\,z)}_{=id}(z\,t) = (x\,y\,z)(y\,z\,t)$ double 3 cycle.

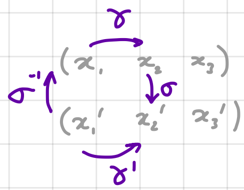
□

Proposition : Pour $n \geq 3$, A_n est engendré par les 3-cycles.

preuve : Puisque toute permutation est produit de transposition c'est en particulier le cas dans A_n. Soit $\sigma \in A_n \setminus \{id\}$
Alors puisque $\varepsilon(\sigma) = +1$, σ est un produit de nombre pair de transpositions.
en les regroupant par deux par la proposition précédente σ est alors produit de 3 cycles.

□

Lemme 2 : pour $n \geq 5$, les 3 cycles sont tous conjugués dans A_n.



preuve : Soient $\gamma = (x_1\; x_2\; x_3)$ et $\gamma' = (x_1'\; x_2'\; x_3')$ deux 3 cycles.
Puisqu'ils ont le même type, il existe $\sigma \in S_n$, $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma'$ et $\sigma(x_k) = x_k'$ pour $k \in [\![1;3]\!]$.

- si $\sigma \in A_n$ c'est fini
- si $\sigma \notin A_n$, on prend x_4, x_5 dans $[\![1,n]\!] \setminus \{x_1', x_2', x_3'\}$ avec $x_4 \neq x_5$ on pose $\sigma' = (x_4\; x_5)\sigma$

qui est dans A_n (signature +1) on a $\sigma'(x_k) = x_k'$ pour $k \in [\![1;3]\!]$ donc $\sigma'\gamma\sigma'^{-1} = \gamma'$
même conclusion.

Trop long pour le mettre dans ce dev.
→ A mettre seulement pour conjugaison dans un grp.

<u>Conclusion :</u> Dans A_n les 3 cycles sont conjugués.

□

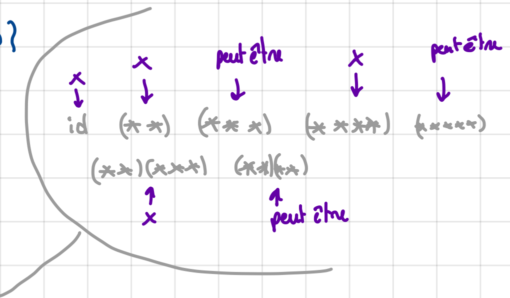
Théorème : Pour $n = 3$ ou $n \geq 5$, A_n est simple.

preuve : <u>pour $n = 3$,</u> $|A_3| = 3$ donc $A_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ simple.
<u>pour $n \geq 5$:</u>

Soit $H \triangleleft A_n$ et $H \neq \{id\}$. Puisque les 3 cycles sont tous conjugués dans A_n et l'engendrent, il suffit de montrer que H contient un 3 cycle (dans ce cas il contiendra donc tout sa classe de conjugaison dans A_n → les 3 cycles et donc A_n)

Soit $\sigma \in H \setminus \{id\}$, x et y tels que $\sigma(x) = y \neq x$ et z tel que $z \notin \{x, y, \sigma^{-1}(x)\}$
$\gamma := (x\; z\; y)$ 3 cycle. On a $\begin{cases} \sigma\gamma(x) = \sigma(z) \neq x \\ \gamma\sigma(x) = x \end{cases}$ donc $\sigma\gamma \neq \gamma\sigma$.

on regarde $\sigma' = \underbrace{\sigma\gamma\sigma^{-1}}_{\in H}\gamma^{-1} \in H$ car $H \triangleleft A_n$



on a $\sigma' = (\sigma(x)\;\; \sigma(z)\;\; \sigma(y))\,(y\; z\; x)$ double 3 cycle
puisque $\gamma\sigma \neq \sigma\gamma$, $\sigma' \neq id$ $\mathrm{sup}(\sigma') \in \{y, z, x, \sigma(y), \sigma(z)\}$ et $\sigma' \in A_n$.
σ' est produit de cycles à supports disjoints donc soit double transposition soit un 3 cycle soit un 5 cycle

. si σ' est un 3 cycle on a gagné

, si σ' est un produit de 2 transpositions à supports disjoints : $\sigma' = (x_1\ x_2)(x_3\ x_4)$ en prenant $x_5 \notin \{x_1 \dots x_4\}$ et en notant $\rho = (x_1\ x_2\ x_5)$

$\sigma'' := \underbrace{\sigma' \rho \sigma'^{-1} \rho^{-1}}_{\in H} \in H$ et $\sigma'' = (x_2\ x_1\ x_5)(x_5\ x_2\ x_1) = (x_2\ x_1)(x_1 x_5)(x_1 x_5)(x_5\ x_2) = (x_1\ x_2\ x_5)$

$\in H$ trois cycle : gagné.

. si σ' est un cinq cycle, $\sigma' = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5)$ et $\rho := (x_1\ x_2\ x_3) \in A_n$

de même $\sigma'' = \sigma' \rho \sigma'^{-1} \rho^{-1}$ $\in H$ et $\sigma'' = (x_2\ x_3\ x_4)(x_3\ x_2\ x_1) = (x_4\ x_2)(x_2\ x_3)(x_3\ x_2)(x_2\ x_1)$

$= (x_4\ x_2\ x_1) \in H$ gagné.

<u>conclusion :</u> $H = A_n$ et donc A_n est simple.

$\square$

Remarque : Le lemme 2 est faux dans S_4 :

$(13)\underbrace{(1\,2\,3)}_{\sigma}(13)^{-1} = \underbrace{(3\,2\,1)}_{\sigma^{-1}}$ donc si $\tau \in S_n$ tq $\tau \sigma \tau^{-1} = \sigma^{-1}$ (dans S_4)

alors $(13)\tau \in \mathrm{stab}(\sigma)$

$|\mathrm{stab}(\sigma)| = \dfrac{24}{|\mathrm{orb}(\sigma)|} = \dfrac{24}{8} = 3$ et $\langle(123)\rangle \subset \mathrm{stab}(\sigma)$ donc $=$ et donc $(13)\tau = \sigma^k$

$\Rightarrow \varepsilon(\tau) = -1$ et $\tau \notin A_4$.

Recasages : 103 : Conjugaison dans un groupe. Ex de sous.grp distingués et de grp quotients. Appli

105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Appli.

108 : Exemple de parties génératrices d'un groupe. Applications.